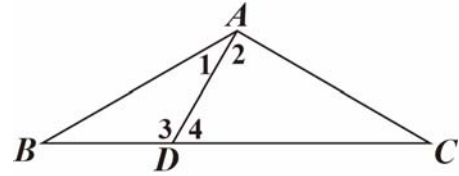


## 105 年國中教育會考數學科非選擇題樣卷說明

### 一、第 1 題試題內容、評分指引、樣卷說明

#### < 試題內容 >

如圖(十七)， $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $D$  點在  $\overline{BC}$  上， $\angle BAD = 30^\circ$ ，且  $\angle ADC = 60^\circ$ 。請完整說明為何  $\overline{AD} = \overline{BD}$  與  $\overline{CD} = 2\overline{BD}$  的理由。



圖(十七)

< 評分指引 > 依據評分規準，此題評分指引如下：

分數	評分指引
3	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 正確使用角度關係及三角形的邊長比例關係，完整推論 <math>\overline{AD} = \overline{BD}</math> 及 <math>\overline{CD} = 2\overline{BD}</math>。</li> <li>2. 作適當的輔助線，正確使用角度關係及三角形的邊長比例關係，完整推論 <math>\overline{AD} = \overline{BD}</math> 及 <math>\overline{CD} = 2\overline{BD}</math>。</li> </ol>
2	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 使用角度關係及三角形的邊長比例關係推論 <math>\overline{AD} = \overline{BD}</math> 及 <math>\overline{CD} = 2\overline{BD}</math>，表達合理，大致完整，但推論過程中缺乏部分步驟間的合理性。</li> <li>2. 作適當的輔助線，使用角度關係及三角形的邊長比例關係推論 <math>\overline{AD} = \overline{BD}</math> 及 <math>\overline{CD} = 2\overline{BD}</math>，表達合理，大致完整，但推論過程中缺乏部分步驟間的合理性。</li> </ol>
1	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 正確寫出推理時需使用到的部分幾何性質、數量、關係或作適當的輔助線，顯示出策略方向正確，但無法合理推得結論。</li> </ol>
0	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 只有答案或與題目無關。</li> <li>2. 策略模糊不清或錯誤。</li> </ol>

<樣卷說明>

序號	3分樣卷一	$\begin{aligned} \angle 3 &= 180^\circ - \angle 4 = 120^\circ \\ \therefore \angle B &= 180^\circ - \angle 1 - \angle 3 = 30^\circ \\ \therefore \angle 1 &= \angle B = 30^\circ \quad \therefore \overline{AD} = \overline{BD} \\ \because \overline{AB} &= \overline{AC} \quad \therefore \angle B = \angle C = 30^\circ \\ \therefore \angle 2 &= 180^\circ - \angle 4 - \angle C = 90^\circ \\ \therefore \triangle ADC &\text{ 為 } 90^\circ - 60^\circ - 30^\circ \text{ 的 } \triangle \\ \therefore \overline{AD} : \overline{CD} &= 1 : 2 \\ \text{又 } \because \overline{AD} &= \overline{BD} \\ \therefore 2\overline{BD} &= \overline{CD} \end{aligned}$
分數	3	
指引	1	
樣卷說明		
<p>正確使用角度關係及三角形的邊長比例關係，完整推論 <math>\overline{AD} = \overline{BD}</math> 及 <math>\overline{CD} = 2\overline{BD}</math>。</p>		

序號	3分樣卷二	$\begin{aligned} 1. \because \angle 1 + \angle B &= \angle 4 \text{ (外角定理)} \\ &\Rightarrow 30^\circ + \angle B = 60^\circ \\ \therefore \angle B &= 30^\circ = \angle 1 \\ \Rightarrow \overline{BD} &= \overline{AD} \\ 2. \text{ 設 } \overline{AC} &= x \\ \text{作 } \overline{AB} \text{ 中垂線交 } \overline{BA} &\text{ 於 } E \text{ 點} \\ \overline{BE} &= \frac{1}{2} \overline{AC} \\ 3. \because \overline{AB} &= \overline{AC} \quad \therefore \angle B = \angle C = 30^\circ \\ \text{又 } \because \angle 4 &= 60^\circ \quad \therefore \angle 2 = 90^\circ \\ \text{在 } \triangle BED \text{ 和 } \triangle CAD &\text{ 中} \\ \because \angle B &= \angle C, \angle BED = \angle 2 \\ \therefore \triangle BED &\sim \triangle CAD \text{ (AA相似)} \\ \text{又 } \overline{BE} : \overline{AC} &= 1 : 2, \overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2 \\ \Rightarrow \overline{CD} &= 2\overline{BD} \end{aligned}$
分數	3	
指引	2	
樣卷說明		
<p>作適當的輔助線，正確使用角度關係及相似三角形的邊長比例關係，完整推論 <math>\overline{AD} = \overline{BD}</math> 及 <math>\overline{CD} = 2\overline{BD}</math>。</p>		

序號	2分樣卷一	$\triangle ABD$ 中 $\angle BAD = 30^\circ$ $\angle ADB = 180^\circ - \angle ADC$ $= 180^\circ - 60^\circ$ $= 120^\circ$ $\angle ABD = 180^\circ - \angle BAD - \angle ADB$ $= 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ$ $= 30^\circ$ $\triangle ABD$ 為等腰三角形 所以 $\overline{AD} = \overline{BD}$
分數	2	
指引	1	
樣卷說明		
未說明 $\triangle ADC$ 的邊長比例關係，使得 $\overline{CD} = 2\overline{BD}$ 的理由不充分，缺乏步驟間的合理性。		$\triangle ADC$ 中 $\angle ADC = 60^\circ$ $\angle ACD = 30^\circ$ ( $\overline{AB} = \overline{AC}$ ) $\angle DAC = 180^\circ - \angle ADC - \angle ACD$ $= 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ $= 90^\circ$ $\triangle ADC$ 為直角三角形 <small>90, 60, 30 的</small> 所以 $\overline{CD} = 2\overline{BD}$

序號	2分樣卷二	因 $\overline{AB} = \overline{AC}$ (已知), $\angle 1 = 30^\circ$ , $\angle 4 = 60^\circ$ <small>(E 知)</small> $\angle 3 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ $\angle B = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ 所以 $\triangle ADB$ 為等腰三角形 (底角相等) 故 $\overline{AD} = \overline{BD}$ # 在 $\overline{CD}$ 上取 E 點, 形成正三角形 $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$ 故 $\overline{CD} = 2\overline{BD}$
分數	2	
指引	2	
樣卷說明		
未說明 $\overline{DE} = \overline{EC}$ 的原因，使得 $\overline{CD} = 2\overline{BD}$ 的理由不充分，缺乏步驟間的合理性。		

序號	1分樣卷一	$\begin{aligned} \angle 3 &= 180 - \angle 4 & \angle ABC &= 180 - \angle 1 - \angle 3 \\ \angle 3 &= 180 - 60 & \angle ABC &= 180 - 30 - 120 \\ &= 120 & &= 30 \end{aligned}$ <p><math>\therefore \angle ABC</math> 與 <math>\angle 1</math> 都為 <math>30^\circ</math>，可以知道 <math>\triangle ABD</math> 是等腰三角形，故 <math>\overline{AD} = \overline{BD}</math></p> $\begin{aligned} \angle 3 &= 120^\circ & \angle 4 &= 60^\circ \\ \therefore \overline{AB} &= \overline{AC} & \therefore \angle 3 : \angle 4 &= \overline{CD} : \overline{BD} \end{aligned}$ $120 : 60 = \overline{CD} : \overline{BD} \quad \overline{CD} : \overline{BD} = 2 : 1$ $\therefore \overline{CD} : \overline{BD} = 2 : 1, \text{ 故 } \overline{CD} = 2\overline{BD}$
分數	1	
指引	1	
樣卷說明		
<p>正確推得 <math>\overline{AD} = \overline{BD}</math>，但誤用不同三角形中角度與邊長的比例關係，無法合理推得 <math>\overline{CD} = 2\overline{BD}</math>。</p>		

序號	1分樣卷二	$\begin{aligned} \because \angle 3 + \angle 4 &= 180^\circ \\ \therefore \angle 3 &= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \end{aligned}$ <p>在 <math>\triangle ABD</math> 中</p> $\begin{aligned} \angle ABD &= 180^\circ - \angle 1 - \angle 3 \\ &= 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ \\ &= 30^\circ \end{aligned}$ $\therefore \angle BAD = \angle ABD = 30^\circ$ $\therefore \overline{AD} = \overline{BD}$
分數	1	
指引	1	
樣卷說明		
<p>僅正確推得 <math>\overline{AD} = \overline{BD}</math>。</p>		

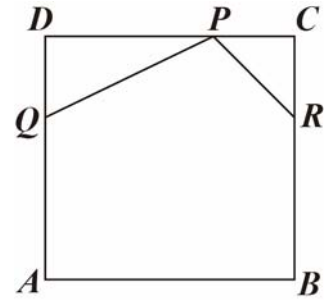
序號	0分樣卷一	
分數	0	
指引	2	
樣卷說明		
<p>僅寫出已知條件及欲說明的結論，策略模糊不清。</p>		$\overline{AB} = \overline{AC}$ $\angle BAD = 30^\circ$ $\angle ADC = 60^\circ$  $\overline{AD} = \overline{BD}$  $\overline{CD} = 2\overline{BD}$

序號	0分樣卷二	
分數	0	
指引	2	
樣卷說明		
<p>僅以文字重述  <math>\overline{AD} = \overline{BD}</math>、  <math>\overline{CD} = 2\overline{BD}</math>，策略模糊不清。</p>		$\overline{AD} = \overline{BD}$ 是因為它們一樣長  $\overline{CD} = 2\overline{BD}$ 是 $\overline{BD} \times 2$ 就等於 $\overline{CD}$

## 二、第 2 題試題內容、評分指引、樣卷說明

### < 試題內容 >

如圖(十八)，正方形  $ABCD$  是一張邊長為 12 公分的皮革。皮雕師傅想在此皮革兩相鄰的角落分別切下  $\triangle PDQ$  與  $\triangle PCR$  後得到一個五邊形  $PQABR$ ，其中  $\overline{PD} = 2\overline{DQ}$ ， $\overline{PC} = \overline{RC}$ ，且  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  三點分別在  $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$  上，如圖(十八)所示。



圖(十八)

- (1) 當皮雕師傅切下  $\triangle PDQ$  時，若  $\overline{DQ}$  長度為  $x$  公分，請你以  $x$  表示此時  $\triangle PDQ$  的面積。
- (2) 承(1)，當  $x$  的值為多少時，五邊形  $PQABR$  的面積最大？請完整說明你的理由並求出答案。

< 評分指引 > 依據評分規準，此題評分指引如下：

分數	評分指引
3	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 正確以符號 <math>x</math> 表示相關圖形面積，利用配方法或公式，完整呈現解題過程與結論。</li> <li>2. 正確以符號 <math>x</math> 表示相關圖形面積，利用列舉法與對稱性，完整呈現解題過程與結論。</li> </ol>
2	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 以符號 <math>x</math> 合理表示相關圖形面積，利用配方法或公式，呈現合理解題過程與結論。</li> <li>2. 以符號 <math>x</math> 合理表示相關圖形面積，利用列舉法與對稱性，呈現合理解題過程與結論。</li> <li>3. 正確以符號 <math>x</math> 表示相關圖形面積，得出正確結論，但解題過程過於簡略，無法顯示部分步驟間的合理性。</li> </ol>
1	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 以符號 <math>x</math> 正確表示部分相關圖形面積。</li> <li>2. 以符號 <math>x</math> 表示相關圖形面積時出現錯誤，但以適當的數學方法呈現解題過程。</li> <li>3. 未以符號 <math>x</math> 表示相關圖形面積，但以代值的方式求出相關圖形面積。</li> </ol>
0	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 只有答案或與題目無關。</li> <li>2. 策略模糊不清或錯誤。</li> </ol>

< 樣卷說明 >

序號	3分樣卷一	<p>(1) <math>x \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} = x^2</math> #</p> <p>(2) <math>y = 12 \times 12 - x \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} - (12-2x)^2 \times \frac{1}{2}</math>  <math>\Rightarrow y = 144 - x^2 - (144 - 48x + 4x^2) \times \frac{1}{2}</math>  <math>\Rightarrow y = 144 - x^2 - 72 + 24x - 2x^2</math>  <math>\Rightarrow y = -3x^2 + 24x + 72</math>  <math>\Rightarrow y = -3(x^2 - 8x + 4^2 - 4^2) + 72</math>  <math>\Rightarrow y = -3(x-4)^2 + 120</math>  <math>\therefore</math> 當 <math>x=4</math> 時, 五邊形 PQABR 的面積最大</p>
分數	3	
指引	1	
樣卷說明		
<p>以符號 <math>x</math> 正確表示五邊形 <b>PQABR</b> 面積, 利用配方法, 得到 <math>x=4</math> 時五邊形 <b>PQABR</b> 面積最大的結論。</p>		

序號	3分樣卷二	<p><math>\therefore \overline{PD} = 2\overline{DQ}</math>                      <math>\therefore \overline{DC} = 12</math>   <math>\overline{DP} = 2x</math>  <math>\therefore \overline{PD} = 2x</math>                              <math>\therefore \overline{CP} = 12 - 2x</math></p> <p><math>\Delta PDQ</math> 面積 = <math>x \times 2x \times \frac{1}{2} = x^2</math></p> <p>五邊形 PQABR 面積 = <math>12^2 - (x^2 + \frac{(12-2x)^2}{2})</math>  <math>= 144 - (x^2 + \frac{144 - 48x + 4x^2}{2})</math>  <math>= 144 - (x^2 + 2x^2 - 24x + 72)</math>  <math>= 144 - 3x^2 + 24x - 72</math>  <math>= -3x^2 + 24x + 72</math>  <math>\therefore x = \frac{-24}{-6} = 4</math> 時有最大值</p> <p><math>\Delta PDQ</math> 面積 <math>\Rightarrow -48 + 96 + 72 = 120</math>  <math>A_5 = x^2</math> 平方公分  <math>\therefore x=4</math> 時五邊形有最大面積: 120 平方公分</p>
分數	3	
指引	1	
樣卷說明		
<p>以符號 <math>x</math> 正確表示五邊形 <b>PQABR</b> 面積, 利用頂點坐標公式, 得到 <math>x=4</math> 時五邊形有最大面積 <b>120</b> 平方公分的結論。</p>		

序號	2分樣卷一
分數	2
指引	1
樣卷說明	
以符號 $x$ 正確表示五邊形 $PQABR$ 面積，呈現利用配方法的過程，但過程中出現計算錯誤，導致得出 $x=3$ 時面積有最大值 <b>126</b> 的結論。	

(1)  
 $\Delta PDQ = \frac{2x \cdot x}{2} = x^2$  平方公分

(2)  
 設最大值為  $y$   
 $y = 144 - x^2 - \frac{(12-2x)(12-2x)}{2}$   
 $y = 144 - x^2 - \frac{2(6-x)(6-x)}{2}$   
 $y = 144 - x^2 - (36 - 12x + x^2)$   
 $y = 144 - x^2 - 36 + 12x - x^2$   
 $y = -2x^2 + 12x + 108$   
 $y = -2(x^2 - 6x + 9) + 126$   
 $y = -2(x-3)^2 + 126$   
 $\therefore$  當  $x=3$  時,  $y$  有最大值 126. A:  $\begin{cases} (1) \Delta PDQ = x^2 \text{ cm}^2 \\ (2) x=3. \end{cases}$

序號	2分樣卷二
分數	2
指引	1
樣卷說明	
以符號 $x$ 正確表示五邊形 $PQABR$ 面積，呈現利用頂點公式的過程，但化簡過程中出現計算錯誤，導致得出 $x=3$ 時面積有最大值 <b>126</b> 的結論。	

設  $\overline{PD} = x$  則  $\Rightarrow x$  (cm)

1.  $\Delta PDQ$  的面積  
 $= \frac{x \times 2x}{2}$   
 $= x^2 \text{ (cm}^2\text{)}$

2. 設  $\overline{PC} = (12-2x)$  (cm)  
 $y =$  五邊形  $PQABR$  的面積  
 $y = 12^2 - x^2 - \frac{(12-2x)^2}{2}$   
 $y = -2x^2 + 12x + 108$   
 當  $x = -\frac{12}{2(-2)} = \frac{12}{4} = 3$  (cm)  
 $y$  有最大值  $= 126 \text{ (cm}^2\text{)}$  A:  $\begin{cases} \text{⊕ } x^2 \text{ cm}^2 \\ \text{⊖ } x=3 \text{ cm}, 126 \text{ cm}^2 \end{cases}$



序號	1分樣卷一	
分數	1	
指引	1	
樣卷說明		
僅以符號 $x$ 正確表示 $\triangle PDQ$ 面積。		$(1) \quad \frac{2x \cdot x}{2} = \frac{2x^2}{2} = x^2.$ $\therefore \triangle PDQ \text{ 面積} = x^2 \text{ 平方公分.}$

序號	1分樣卷二	
分數	1	
指引	2	
樣卷說明		
以符號 $x$ 表示五邊形 $PQABR$ 面積時出現錯誤，但嘗試使用配方法呈現解題過程。		$\textcircled{1} \quad \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2$ $\textcircled{2} \quad \text{設正方形 } ABCD \text{ 面積為 } y$ $y = 144 - x^2 - \frac{(12-x)^2}{2}$ $= -\frac{3}{2}x^2 + 12x + 72$ $= -\frac{3}{2}(x^2 - 18x - 108)$

序號	0分樣卷一	$\overline{PD} = 2\overline{DQ}, \therefore \angle PDQ = 90^\circ, \therefore \angle DPQ = 30^\circ,$ $\angle PQD = 60^\circ$ $\overline{PC} = \overline{CR}, \therefore \angle PCR = 90^\circ, \therefore \angle CPR = \angle PRC = 45^\circ$ <p>(1) <math>\overline{DQ}</math> 為 <math>x</math> 時 <math>\overline{PD} = \sqrt{3}x, \therefore \triangle PDQ</math> 面積</p> $= \frac{x \cdot \sqrt{3}x}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{2} \text{ 平方單位}$
分數	0	
指引	2	
樣卷說明		
策略錯誤。		

序號	0分樣卷二	<p>①</p> $\overline{DQ} = x = 1$ $\overline{DP} = 2$ $\overline{PQ} = 3$
分數	0	
指引	2	
樣卷說明		
策略模糊不清。		